Tentamen Geometric Algorithms

23 april, 2008

9.00–12.00

Punten: Je krijgt 10 punten gratis. Het maximale aantal punten is bij elk van de **vier opgaven** aangegeven. Leg duidelijk de correctheid van de oplossing uit. Leid de complexiteit van een algoritme af, indien van toepassing. Vermijd lange uitwijdingen. Correcte antwoorden met een sloppy of incomplete uitwerking krijgen niet het maximale aantal punten.

Gebruik literatuur: Je mag Edelsbrunner's boek en het hoofdstuk over Computational Topology gebruiken, en een a4-tje met wiskundige formules.

1. Eigenschappen van Delaunay-triangulaties (25)

Laat S een eindige verzameling punten zijn in het vlak.

1. Laat p en q twee punten van S zijn waarbij q de *nearest neighbor* van p in S is. Toon aan dat pq een edge is van de Delaunay-triangulatie van S.
2. Als voor elke driehoek τ van een triangulatie $\mathcal{T}$ van S geldt dat het middelpunt van de omgeschreven cirkel van τ binnen τ ligt, dan is $\mathcal{T}$ de Delaunay-triangulatie van S. Toon dit aan.

2. Weighted Voronoi Diagrams (20)

Laat S een verzameling cirkels in het vlak zijn, en C de verzameling middelpunten van deze cirkels.

1. Geef een voorbeeld van een verzameling S met tenminste één redundante cirkel. Zie ook [Edelsbrunner, pag. 99].
2. Als het middelpunt van een cirkel een extremaal punt is van C, dan is deze cirkel niet redundant. Bewijs deze eigenschap.

3. Inwendige edges (20)

Laat P een convex polytoop in $\mathbb{R}^3$ zijn met n hoekpunten, en K een tetrahedrisatie van P waarvan alle vertices tot P behoren. De hoekpunten van P liggen in algemene positie, dus elke *face* van het polytoop is een driehoek. Een *inwendige edge* is een edge van de tetrahedrisatie die in het inwendige van P ligt. Een *inwendige driehoek* is een driehoek dat in het inwendige van P ligt.

1. Toon aan dat (de rand van) het polytoop $3n-6$ edges en $2n-4$ driehoekige faces heeft.
2. Als K geen inwendige edges heeft, dan is het aantal tetraëders in K gelijk aan $n-3$. Toon dit aan.
   (Aanwijzing: merk op dat een inwendige driehoek, indien aanwezig, P in twee polytopen verdeelt, elk met minder hoekpunten dan P. Wat voor polytoop is P als er geen inwendige driehoeks zijn?)
3. Toon aan dat de Eulerkarakteristiek van K gelijk is aan 1.
4. Wat is het aantal tetraëders in K als er t inwendige edges zijn?

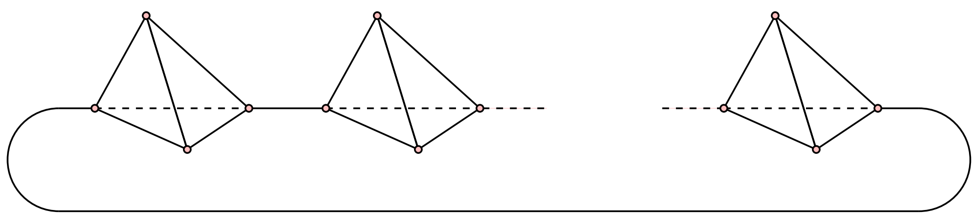
4. Homologie en Morse-theorie (25)

1. M en N zijn twee disjuncte eindigdimensionale simpliciale complexen. Toon aan dat voor de Bettigetallen geldt:

$$\beta_i(M \cup N) = \beta_i(M) + \beta_i(N),$$

voor $i \geq 0$.

2. Bereken de Bettigetallen van het simpliciale complex gevormd door een cykel van g tetraëders als in figuur 1. Hierbij zijn de tetraëders 2-dimensionaal, dus hun inwendige hoort niet bij het simpliciale complex.



Figuur 1: Een cykel van tetraëders

3. Laat M een oppervlak zijn van geslacht g (een '2-sfeer met g hengsels'). Bewijs dat een Morse functie op M tenminste $2 + 2g$ kritieke punten heeft.